

Fondamenti della matematica

Lezione 2: teoria assiomatica degli insiemi e il formalismo

Zona Autonoma Milano, 24 marzo 2026

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

Platonismo: gli oggetti matematici esistono **tanto quanto** gli oggetti reali.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

Platonismo: gli oggetti matematici esistono **tanto quanto** gli oggetti reali.

Frege: tentativo di ridurre la matematica alla logica.

La matematica come problema filosofico: integrazione di **ontologia** e **epistemologia**.

Platonismo: gli oggetti matematici esistono **tanto quanto** gli oggetti reali.

Frege: tentativo di ridurre la matematica alla logica.

Crisi nei fondamenti

Teoria degli insiemi

Abbiamo visto che l'analisi matematica può essere ricondotta all'aritmetica.

Abbiamo visto che l'analisi matematica può essere ricondotta all'aritmetica.

Una teoria più potente: la teoria degli insiemi.

Abbiamo visto che l'analisi matematica può essere ricondotta all'aritmetica.

Una teoria più potente: la teoria degli insiemi.

Numeri, **funzioni**, strutture algebriche, strutture geometriche.

Abbiamo visto che l'analisi matematica può essere ricondotta all'aritmetica.

Una teoria più potente: la teoria degli insiemi.

Numeri, **funzioni**, strutture algebriche, strutture geometriche.

Insiemi infiniti (**Georg Cantor**).

Idea: studiamo i gruppi di cose che soddisfano una qualche proprietà.

Idea: studiamo i gruppi di cose che soddisfano una qualche proprietà.

Problema: non possiamo utilizzare il principio di comprensione. Non tutti i predicati possono generare un insieme.

Fare come abbiamo fatto per i numeri:

Fare come abbiamo fatto per i numeri:

- rinunciare a descrivere gli insiemi come a qualcosa di intuitivo;

Fare come abbiamo fatto per i numeri:

- rinunciare a descrivere gli insiemi come a qualcosa di intuitivo;
- assumere che alcune cose chiamate insiemi esistono e dare regole per costruirne altre;
- assumere che esiste una relazione \in di **appartenenza**.

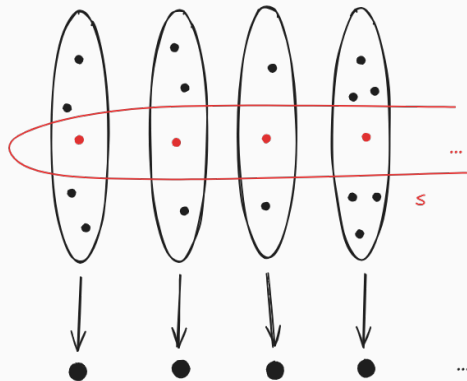
- C'è un insieme, \emptyset che non contiene nulla;
- c'è un insieme \mathbb{N} dei **numeri naturali**;
- se X e Y sono insiemi allora c'è l'insieme $X \times Y$ delle **coppie ordinate**;
- se X e Y sono insiemi allora c'è l'insieme Y^X delle **funzioni**;
- se X è un insieme allora l'insieme $\mathcal{P}(X)$ dei suoi **sottoinsiemi** è un insieme.
- se X è un insieme e P è un predicato esiste l'insieme **degli** $x \in X$ che soddisfano P .

Gli assiomi precedenti sono accolti da quasi tutti.

L'assioma della scelta

Gli assiomi precedenti sono accolti da quasi tutti.

Assioma della scelta: se ho una famiglia di insiemi posso scegliere un elemento da ognuno di essi e in questo modo ottengo un insieme.



L'assioma della scelta appare in **tantissime** aree della matematica.

Prima stranezza: consente di dimostrare l'**esistenza** di oggetti. Non consente **mai** di costruirli **esplicitamente**.

Il paradosso di Banach-Tarski

Ma c'è una **seconda** stranezza.

Il paradosso di Banach-Tarski

Ma c'è una **seconda** stranezza.

Paradosso di Banach-Tarski

Possiamo dividere una sfera in 5 pezzi e muoverli nello spazio per ricostruire **due** sfere.



Si può dimostrare che l'assioma della scelta è **indipendente** dagli altri assiomi.

Si può dimostrare che l'assioma della scelta è **indipendente** dagli altri assiomi. Crederci o no è questione di **opinioni personali** e produce matematiche **molto diverse**.

Gli assiomi della teoria degli insiemi ci consentono di costruire i numeri naturali e da questi i razionali e poi i numeri reali.

Gli assiomi della teoria degli insiemi ci consentono di costruire i numeri naturali e da questi i razionali e poi i numeri reali.

Quanti numeri reali ci sono?

Gli assiomi della teoria degli insiemi ci consentono di costruire i numeri naturali e da questi i razionali e poi i numeri reali.

Quanti numeri reali ci sono?

Infiniti!

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1	0,23787428...
2	0,108938498...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1	0,23787428...
2	0,108938498...
3	0,837276367...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1	0,23787428...
2	0,108938498...
3	0,837276367...
4	0,647872873...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1	0,23787428...
2	0,108938498...
3	0,837276367...
4	0,647872873...
...	...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

... ...

0,3189...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

... ...

0,3189...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

... ...

0,3189...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

...

...

0,3189...

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

...

...

0,3189...

Infiniti infiniti

Se provo ad enumerare i numeri reali tra 0 e 1 non riesco mai a prenderli tutti!

1 0,23787428...

2 0,108938498...

3 0,837276367...

4 0,647872873...

...

...

0,3189...

I numeri reali sono **più infiniti** dei naturali!

Ci sono altri infiniti tra il numero dei naturali e quello dei reali?

Ci sono altri infiniti tra il numero dei naturali e quello dei reali?

Ipotesi del continuo: no!

Ci sono altri infiniti tra il numero dei naturali e quello dei reali?

Ipotesi del continuo: no!

Anche lei indecidibile.

Formalismo

Term formalism: i termini della matematica hanno un significato: sè stessi.

Term formalism: i termini della matematica hanno un significato: sè stessi.

Regole di riscrittura: regole che consentono di riscrivere un termine in un altro.
Garantiscono **applicabilità**.

Term formalism: i termini della matematica hanno un significato: sè stessi.

Regole di riscrittura: regole che consentono di riscrivere un termine in un altro. Garantiscono **applicabilità**.

Problema 1: se i numeri denotano sè stessi allora il simbolo = assume un significato diverso da quello usuale. Ora significa “esiste una serie di riscritture”.

Term formalism: i termini della matematica hanno un significato: sè stessi.

Regole di riscrittura: regole che consentono di riscrivere un termine in un altro. Garantiscono **applicabilità**.

Problema 1: se i numeri denotano sè stessi allora il simbolo = assume un significato diverso da quello usuale. Ora significa “esiste una serie di riscritture”.

Problema 2: necessita di **infiniti** simboli.

Assiomi **ad hoc** con l'unico scopo di giustificare l'aritmetica e **controversi**.

Assiomi **ad hoc** con l'unico scopo di giustificare l'aritmetica e **controversi**.
Risultati **distaccati** dall'esperienza.

Assiomi **ad hoc** con l'unico scopo di giustificare l'aritmetica e **controversi**.

Risultati **distaccati** dall'esperienza.

Formalismo: le proposizioni della matematica non hanno **significato**. La matematica si occupa solo di **sintassi** e non di **semantica**.

Paragone matematica scacchi: matematica è un gioco che consiste nel muovere simboli secondo certe regole (**game formalism**).

Paragone matematica scacchi: matematica è un gioco che consiste nel muovere simboli secondo certe regole (**game formalism**).

Problema dell'applicabilità: come mai la matematica **sembra** avere un contenuto?

Paragone matematica scacchi: matematica è un gioco che consiste nel muovere simboli secondo certe regole (**game formalism**).

Problema dell'applicabilità: come mai la matematica **sembra** avere un contenuto?

Traduzione delle formule matematiche in proposizioni **significantive** sul mondo.

Problema della consistenza: come facciamo ad essere sicuri che il mio gioco non generi contraddizioni?

Problema della consistenza: come facciamo ad essere sicuri che il mio gioco non generi contraddizioni?

Due soluzioni:

- non è responsabilità del matematico;

Problema della consistenza: come facciamo ad essere sicuri che il mio gioco non generi contraddizioni?

Due soluzioni:

- non è responsabilità del matematico;
- identificare un'area della matematica che sia **significativa** per poter dimostrare la consistenza di una teoria.

Problema della consistenza: come facciamo ad essere sicuri che il mio gioco non generi contraddizioni?

Due soluzioni:

- non è responsabilità del matematico;
- identificare un'area della matematica che sia **significativa** per poter dimostrare la consistenza di una teoria.

La prima è inaccettabile. La seconda porta al **Programma di Hilbert**.